

APENDICE

I. Transcendencia de e y π

Comenzaremos hablando de los números e y π , y, en particular, con la demostración de que son trascendentes.

El interés por el número π , en forma geométrica, procede ya de la *antigüedad*; en efecto, ya entonces era corriente la distinción entre el problema de su *cálculo aproximado* y el de su *construcción teórica exacta*, y se estaba en posesión de ciertos conocimientos fundamentales para la solución de ambas cuestiones. En la primera hizo grandes progresos, como es sabido, *Arquímedes* con su procedimiento de la *aproximación del círculo por polígonos inscritos y circunscritos*; la segunda llevó muy pronto al problema de la *posibilidad de construcción de π con la regla y el compás*, cuestión que fué investigada de todas las maneras posibles sin advertir la razón del constante fracaso—la imposibilidad de resolución del problema—; todo lo que se ha conservado de las primeras de tales tentativas ha sido recientemente publicado por *Rubio* (1). La *cuadratura del círculo* es, todavía hoy, uno de los problemas más populares, e innumerables gentes (como ya hemos dicho) prueban fortuna en él, sin saber o sin creer que la Ciencia moderna hace tiempo que lo ha resuelto en sentido negativo.

En efecto, *todos estos antiguos problemas están hoy completamente resueltos*. Se duda con frecuencia si el conocimiento humano puede, en general, progresar, y quizá haya razón para la duda en algunas regiones del saber; pero en la Matemática hay seguramente progresos, y aquí tenemos un ejemplo de ello.

(1) Der Bericht der Simplicius über die Quadraturen der Antiphon und Hippokrates—Leipzig, 1908.

Los fundamentos en que se basa la solución moderna de estos problemas son ya de los tiempos de *Newton* a *Euler*. Para la determinación numérica aproximada de π son un excelente recurso las *series infinitas*, que hacen posible el cálculo con toda la exactitud que apetezca. Un inglés, llamado *Shanks*, ha logrado calcular π con 700 cifras decimales (1), siendo este resultado el más exacto de los hallados hasta ahora ; si bien es de advertir, que en todo ello sólo hay, por decirlo así, el interés deportivo de establecer un record de calculador, pues para las aplicaciones nunca es necesaria tal exactitud. En lo que respecta al *lado teórico* del problema, por la misma época se introdujo por primera vez en las investigaciones la consideración del número *e*, base del sistema de *logaritmos neperianos*. Fué entonces cuando se descubrió la admirable relación $e^{i\pi} = -1$ y en el *Cálculo integral* se encontró también como veremos, un recurso para la definitiva solución del problema de la cuadratura del círculo. El paso decisivo para ella fué dado como, es sabido, por *Hermite* (2) cuando demostró en 1783 la *transcendencia* de *e*. No logró, sin embargo, dar también una demostración de la transcendencia de π ; la gloria de esto corresponde a *Lindemann*, en el año 1882.

En estas demostraciones hay, en primer término, una *generalización esencial del planteamiento clásico del problema*. En éste se trataba solamente de *construir π con la regla y el compás*, lo que analíticamente se expresa, como ya sabemos (véase página 63), por la *posibilidad de representar π por una sucesión de raíces cuadradas de números racionales*. Ahora, sin embargo, no sólo se afirma la imposibilidad de esta representación, sino aún más, que π y lo mismo *e* son *transcendentes*, es decir, *no pueden estar ligados por ninguna relación algebraica con números enteros*; o, dicho de otro modo, *ni e ni π pueden ser raíces de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros*:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0,$$

cualesquiera que sean los números enteros a_0, \dots, a_n y el grado, n , de la ecuación. Lo fundamental en esto es que *los coeficientes*

(1) Véase Weber-Epstein, tomo I, pág. 523.

(2) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, pág. 679 y Math. Ann. tomo XX, 1882, pág. 213 y sig.

sean enteros; bastará decir racionales, puesto que siempre, por multiplicación por el denominador común a que pueden reducirse los coeficientes, quedarían éstos transformados en enteros.

Pasemos a la *demostración de la trascendencia de e* y en ella seguiremos el procedimiento muy simplificado expuesto por Hilbert en el tomo 43 de *Mathem. Annalen* (1893).

La cuestión es, como decimos, probar que la hipótesis de una ecuación :

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0, \quad (a_0 \neq 0), \quad [1]$$

con coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n enteros conduce a una contradicción, la cual *se manifiesta en las propiedades más sencillas de los números enteros*. Supondremos conocidos, de la teoría de números, solamente las leyes más elementales de la divisibilidad; en particular, que *todo entero positivo no puede ser descompuesto más que de un solo modo en un producto de factores primos y que existen infinitos números primos*.

El *plan de la demostración* es éste: Daremos un procedimiento para obtener valores muy aproximados de e y sus potencias por medio de números racionales, de modo que serán :

$$e = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \quad \dots \quad e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M}, \quad [2]$$

en cuyas expresiones M, M_1, M_2, \dots, M_n , son números enteros y $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{M}$ fracciones positivas sumamente pequeños.

Después, multiplicando por M aquella ecuación [1] se transforma en esta otra :

$$*(a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n) + (a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n) = 0. \quad [3]$$

El primer paréntesis del primer miembro es *un número entero* y probaremos que *no puede ser nulo*; el segundo sumando podremos convertirlo en una *fracción propia positiva*, tomando las ε suficientemente pequeñas; con lo cual tendremos la *contradicción manifiesta de que admitiendo la hipótesis hecha, un número entero no nulo, $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$, aumentando en una frac-*

ción propia, $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n$, diferente de la unidad, da una suma nula, deduciéndose de aquí la imposibilidad de la ecuación [1].

En esta demostración encuentra una importante aplicación la propiedad de que *todo número entero no divisible por un número determinado cualquiera es diferente de cero* (pues el cero es divisible por todo número entero); pues probaremos que los números M_1, M_2, \dots, M_n son divisibles por un cierto número primo p pero que seguramente no lo es $a_0 M$, y en consecuencia, la suma $a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n$ no puede ser divisible por p y, por lo tanto, es diferente de cero.

El principal recurso utilizado en este proceso de razonamiento es la *consideración de una cierta integral definida*, la cual fué introducida en estas cuestiones por *Hermite*, y a la que por esta razón llamaremos *integral de Hermite*. En la manera de formarla estriba la clave de toda la demostración. Esta integral, que, como veremos, tiene realmente un valor entero, que designaremos por M , es la siguiente:

$$M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1} [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^p \cdot e^{-z}}{(p-1)!} dz, \quad [4]$$

siendo n el grado de la ecuación [1] y p un número primo impar que determinaremos más tarde. Por medio de esta integral obtendremos también la aproximación deseada [2] de las potencias e^ν ($\nu=1, 2, 3, \dots$), descomponiendo el intervalo de integración de la integral $M \cdot e^\nu$ por el punto ν y escribiendo según esto:

$$M_\nu = e^\nu \int_0^\infty \frac{z^{p-1} [(z-1)\dots(z-n)]^p \cdot e^{-z}}{(n-1)!} dz, \quad [4 a]$$

$$\varepsilon_\nu = e^\nu \int_0^\nu \frac{z^{p-1} [(z-1)\dots(z-n)]^p \cdot e^{-z}}{(n-1)!} dz, \quad [4 b]$$

Dicho esto, pasemos ya a *efectuar realmente la demostración*.

1.º Partiremos de la conocida fórmula de los comienzos de la teoría de la función Γ :

$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z} dz = \Gamma(\rho)$$

que sólo necesitamos utilizar *para valores enteros de ρ* , en cuyo caso es $\Gamma(\rho)=(\rho-1)!$ Con esta restricción de ser ρ entero, se demuestra esta fórmula muy sencillamente: basta integrar por partes, teniendo en cuenta que es $\rho > 1$ y se tiene:

$$\int_0^{\infty} z^{\rho-1} e^{-z} dz = \left[-z^{\rho-1} e^{-z} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (\rho-1) z^{\rho-2} e^{-z} dz,$$

En el segundo miembro aparece nuevamente una integral exactamente de la misma forma que la del primero, sin más variación que estar disminuído en una unidad el exponente de z , de modo que aplicando reiteradamente esta última fórmula se llega finalmente, para valores enteros de ρ a z^0 y puesto que $\int_0^{\infty} e^{-z} dz = 1$, resulta.

$$\int_0^{\infty} z^{\rho-1} e^{-z} dz = (\rho-1)(\rho-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (\rho-1)! \quad [5]$$

Esta integral es, por consiguiente, para valores enteros de ρ , un número entero, que crece con extraordinaria rapidez al crecer ρ .

Para hacer ver esto de un modo *intuitivo geoméricamente* representamos (fig. 111) la función $z^{\rho-1} e^{-z}$ para valores diferentes de ρ ; entonces, la integral vendrá representada por el área de

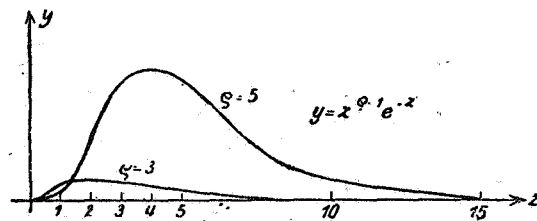


Figura 111

la superficie comprendida entre el eje z y la curva extendida hasta lo infinito. Al ir creciendo ρ , la curva se acerca al eje z en las proximidades del origen, y la ordenada aumenta rápidamente a partir de $z=1$; la curva alcanza el máximo valor, cualquiera que sea ρ , para $z=\rho-1$; por consiguiente, más a la dere-

cha cada vez y creciendo constantemente el valor del máximo. A la derecha de éste domina el factor e^{-z} y la ordenada decrece, acercándose la curva al eje z ; que es una asíntota. Se comprende así que el área—nuestra integral—se conserve siempre finita, pero creciendo rápidamente con ρ .

2.º Ya en posesión de esta fórmula podemos evaluar ahora fácilmente la integral de Hermite. Efectuando el producto de los factores binómicos del integrando y desarrollando la potencia del polinomio, el integrando toma la forma :

$$\begin{aligned} [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^p &= [z^n + \dots + (-1)^n n!]^p = \\ &= z^{np} + \dots + (-1)^n (n!)^p, \end{aligned}$$

donde sólo hemos escrito el término de mayor grado y el de menor (es decir, el término independiente de z); y el valor de la integral será :

$$M = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz + \sum_{\rho=p+1}^{np+p} \frac{C_\rho}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z} dz,$$

representando C_ρ constantes enteras, que se deducen del desarrollo de la potencia del polinomio. Aplicando ahora a cada una de estas integrales la fórmula [5], tendremos :

$$M = (-1)^n (n!)^p + \sum_{\rho=p+1}^{np+p} C_\rho \frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$$

El índice ρ de los sumandos es siempre mayor que p y, por consiguiente, $\frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$ es un número entero, que contiene el factor p , al cual podemos sacar factor común de toda la suma, y tendremos :

$$M = (-1)^n (n!)^p + p [C_{p+1} + C_{p+2} (p+1) + C_{p+3} (p+1)(p+2) \dots]$$

De aquí se sigue que M será o no divisible por p al mismo tiempo que el primer sumando $(-1)^n (n!)^p$, pero como p es un número primo, este sumando seguramente no será divisible por p

cuando p no figure entre los factores $1, 2, 3, \dots, n$, y esto ocurre siempre que sea $p > n$. Esta condición puede quedar realmente satisfecha de infinitas maneras, puesto que hay infinitos números primos, y con cualquiera de ellas habremos logrado que $(-1)^n (n!)^p$ y, por lo tanto, M seguramente no sea divisible por p .

3.º Estudiemos ahora los números M_ν ($\nu=1, 2, 3, \dots$), definidos por la fórmula [4] de la pág. 356). Para ello, introduzcamos el factor e^ν bajo el signo integral y tomemos la nueva variable de integración $\zeta = z - \nu$, la cual varía desde 0 hasta ∞ cuando z varía desde ν hasta ∞ ; se tiene entonces:

$$M_\nu = \int_0^\infty \frac{(\zeta + \nu)^{p-1} [\zeta + \nu - 1](\zeta + \nu - 2) \dots \zeta \dots (\zeta + \nu - n)]^p \cdot e^{-\zeta}}{(p-1)!} d\zeta$$

Esta expresión tiene una forma completamente análoga a la antes considerada de M , y podemos operar con ella de la misma manera que con esta última. Efectuando la multiplicación de los factores del integrando, se obtiene una suma de potencias con coeficientes enteros, entre las cuales la de menor grado es ζ^p . La integral del numerador es, por lo tanto, una combinación entera de las integrales

$$\int_0^\infty \zeta^p e^{-\zeta} d\zeta, \int_0^\infty \zeta^{p+1} e^{-\zeta} d\zeta, \dots, \int_0^\infty \zeta^{(n+1)p-1} e^{-\zeta} d\zeta$$

y puesto que, según [5], éstas son, respectivamente, iguales a $p!$, $(p+1)!$, ... aquella integral es igual al producto de $p!$ por un número entero A_ν ; por lo tanto, para todo ν es:

$$M_\nu = \frac{p! A_\nu}{(p-1)!} = p! A_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

lo cual prueba que, en efecto, M_ν es un número entero divisible por p .

Enlazando esto con el resultado del párrafo 2.º tenemos ya los fundamentos para la conclusión antes indicada: la suma $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ no puede ser divisible por el número primo p , y por lo tanto, es distinta de cero.

4.º La segunda parte de la demostración se refiere a la suma $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$ en la que, según [4], es:

$$\varepsilon_\nu = \int_0^\infty \frac{z^{p-1} [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^p e^{-z+\nu}}{(p-1)!} dz;$$

y tenemos ahora que probar que estas ε_ν , eligiendo convenientemente p , pueden ser *tan pequeñas como se quiera*. Para nuestro objeto utilizaremos al poder ser p tan grande como se quiera, pues las únicas condiciones a las cuales hemos sometido p hasta ahora ($p > n$, $p > |a_0|$) quedan satisfechas por infinidad de números primos suficientemente grandes.

Hagamos, primero, una *representación gráfica* (fig. 112) del

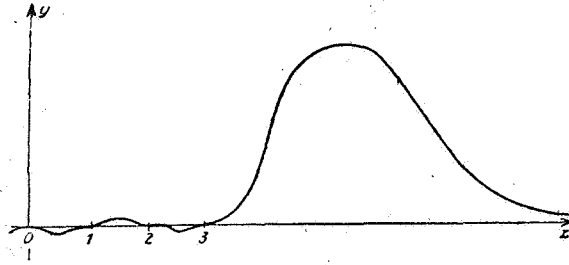


Figura 112

integrando; la curva que lo representa es tangente al eje z en el punto $z=0$ y también en los $z=1, 2, \dots, n$, pero en todos éstos atraviesa al eje por ser p impar. Como veremos en seguida más circunstancialmente, en todo el intervalo $(0, n)$ la ordenada es muy pequeña a causa del denominador $(p-1)!$, si se ha tomado p suficientemente grande, y así se comprende que la integral ε_ν sea muy pequeña. En cuanto es $z > n$ el integrando crece nuevamente de modo considerable y decrece después para ser el eje z asíntota de la curva, como en la antes considerada, $z^{p-1} e^{-z}$ (para $p=(n+1)p$); resultando que el valor, M , de la integral extendida desde 0 hasta ∞ crece rápidamente con p .

Conformándonos con encontrar una limitación del valor buscado, no será necesario afinar mucho en el procedimiento. Sean G y g_ν los máximos de los valores absolutos de las funciones

$z(z-1)\dots(z-n)$ y $(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z+\nu}$ en el intervalo $(0, n)$:

$$\left. \begin{aligned} |z(z-1)\dots(z-n)| &\leq G \\ |(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z+\nu}| &\leq g_\nu \end{aligned} \right\} \text{ para } 0 \leq z \leq n.$$

Puesto que la integral de cada una de estas funciones nunca es mayor que la integral de su valor absoluto, para todo ε_ν será:

$$|\varepsilon_\nu| \leq \left\{ \int_0^\nu \frac{G^{p-1} g_\nu}{(p-1)!} dz = \frac{G^{p-1} g_\nu \cdot \nu}{(p-1)!} \right\}.$$

Ahora bien, G , g_ν y ν son números fijos independientes de p ; la factorial $(p-1)!$ que aparece en el denominador crece, como es sabido, mucho más rápidamente que la potencia G^{p-1} del numerador, o, dicho más exactamente: para valores de p suficientemente grandes, $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ llega a ser más pequeño que cualquier número dado, por pequeño que sea. Podemos, por consiguiente, según [6], tomar p suficientemente grande para que cada uno de los n números ε_ν llegue a ser *tan pequeño como se quiera*.

De aquí se deduce inmediatamente que también la suma de los n términos $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$ puede hacerse tan pequeña como queramos; se tiene, en efecto:

$$|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n| \leq |a_1||\varepsilon_1| + |a_2||\varepsilon_2| + \dots + |a_n||\varepsilon_n|;$$

y según [6]:

$$\leq (|a_1| \cdot 1 \cdot g_1 + |a_2| \cdot 2 \cdot g_2 + \dots + |a_n| \cdot n \cdot g_n) \cdot \frac{G^{p-1}}{(p-1)!};$$

como el paréntesis tiene un valor fijo independiente de p , podemos lograr, en virtud del factor $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ que el último miembro de estas relaciones y, por lo tanto, *también* $|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n|$ sea *tan pequeño como se quiera; en particular, menor que 1*.

Con esto hemos llegado a la contradicción que se deriva de la existencia de la ecuación [3] ya mencionada:

$$[a_0 M + a_1 M_1 + a_n M_n] + [a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n] = 0,$$

puesto que un número entero, distinto de cero, aumentado en un quebrado propio, daría un resultado nulo. Por consiguiente, la ecuación [3] no puede existir y con ello queda demostrada la trascendencia del número e .

Pasemos ahora a la demostración de la trascendencia de π , un poco más dificultosa que la anterior, pero también sencilla.

Lindemann planteó este problema del modo siguiente: Se ha probado hasta ahora que una ecuación $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} e^{\nu} = 0$ no puede existir cuando los coeficientes a_{ν} y los exponentes, ν , de e , son números naturales; ¿no ocurrirá lo mismo si a_{ν} y ν tuviesen valores algebraicos cualesquiera? Y, en efecto, esta conclusión fue demostrada por *Lindemann*, cuyo teorema más general sobre la función exponencial se enuncia así: Una ecuación $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} e^{b_{\nu}} = 0$ no puede existir cuando las a_{ν} son números algebraicos arbitrarios y las b_{ν} números también algebraicos y diferentes entre sí. La trascendencia de π resulta, entonces, como un simple corolario de este teorema, pues verificándose, como es sabido, la relación $1 + e^{i\pi} = 0$, si π fuese un número algebraico, lo sería también $i\pi$ y la existencia de esta ecuación contradiría el teorema de *Lindemann*.

Vamos ahora a demostrar con detalle sólo un caso particular determinado del teorema de *Lindemann*, que comprende la trascendencia de π . Para ello seguiremos en lo esencial, como antes, el método dado por *Hilbert* en el tomo 43 de *Mathem. Ann.*, que simplifica notablemente la demostración de *Lindemann* y es una generalización exacta de las precedentes consideraciones relativas al número e .

El punto de partida lo constituye la relación:

$$1 + e^{i\pi} = 0. \quad [1]$$

Suponiendo ahora que π satisfaga a una cierta ecuación algebraica de coeficientes enteros, $i\pi$ deberá satisfacer también a una ecuación de esta misma naturaleza. Sean, entonces, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

todas las raíces de esta última ecuación, entre las cuales figura $i\pi$; la ecuación [1] demuestra que deberá ser:

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \dots (1 + e^{\alpha_n}) = 0$$

o bien, efectuando el producto indicado:

$$1 + (e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \dots + e^{\alpha_n}) + (e^{\alpha_1 + \alpha_2} + e^{\alpha_1 + \alpha_3} + \dots + e^{\alpha_{n-1} + \alpha_n}) \\ + \dots + (e^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}) = 0 \quad [2]$$

Algunos de los exponentes que aparecen en esta expresión podrían ser nulos; cuando esto ocurra, el primer miembro contendrá el sumando positivo 1 y todos estos sumandos, con el 1 que ya aparece en primer término, darán un número entero positivo, a_0 , seguramente diferente de cero. Designando por $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$, los demás exponentes distintos de cero podremos, pues, escribir la ecuación [2] en esta forma:

$$a_0 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_N} = 0, \quad (a_0 > 0). \quad [3]$$

Ahora bien, los números $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ son raíces de una ecuación algebraica de coeficientes enteros; pues, de la ecuación de coeficientes enteros cuyas raíces son $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, se puede deducir, en la forma de todos conocida, una ecuación de la misma naturaleza cuyas raíces sean las sumas de aquéllas dos a dos: $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \dots$, tres a tres: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \dots$, y así sucesivamente hasta llegar a la suma de todas: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, también racional que, por consiguiente, satisfará a una ecuación lineal de coeficientes enteros. Multiplicando miembro a miembro todas las ecuaciones así formadas se obtiene una nueva ecuación de coeficientes enteros, que puede tener algunas raíces nulas, y cuyas restantes raíces serán las $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$, si en ella suprimimos las potencias de la incógnita que corresponden a las primeras raíces, queda una ecuación algebraica de coeficientes enteros, y grado N , cuyas raíces son las N magnitudes β , y con el término constante distinto de cero:

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_N z^N = 0, \quad (b_0, b_N \neq 0). \quad [4]$$

Lo que ahora hemos de demostrar, y que, según lo antes dicho, comprende la trascendencia de π , es este caso particular del teorema de Lindemann :

Una ecuación de la forma [3], en la que el coeficiente a_0 es un número entero no nulo, no puede existir cuando $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ son las N raíces de una ecuación algebraica [4] de grado N y coeficientes también enteros.

La demostración se hace de modo exactamente igual que la de la trascendencia de e . Así como allí se podían obtener valores tan aproximados como se quiera, de las potencias e^1, e^2, \dots, e^n , por medio de números racionales, se tratará aquí también de encontrar la *mayor aproximación posible de las potencias de e que aparecen en la ecuación [3]*; de modo que, empleando las mismas notaciones que antes, escribiremos :

$$e^{\beta_1} = \frac{M_1 + \xi_1}{M}, \quad e^{\beta_2} = \frac{M_2 + \xi_2}{M}, \quad \dots, \quad e^{\beta_N} = \frac{M_N + \xi_N}{M}, \quad [5]$$

en cuyas expresiones, el denominador M es un número entero pero los M_1, M_2, \dots, M_N no serán ya números racionales enteros sino números enteros algebraicos, y los $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ que, en general, pueden ser ahora números complejos, tendrán valores absolutos muy pequeños, en lo cual estriba precisamente la mayor complicación respecto del caso anterior. La suma de todos los M_1, M_2, \dots, M_N representará, como antes, un número entero; y de tal modo podremos escogerlos que el primer sumando de la ecuación

$$[a_0 M + M_1 + M_2 + \dots + M_N] + [\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N] = 0, \quad [6]$$

en la que se convierte la [3] en virtud de las [5], después de la multiplicación por M , llegue a ser un número entero diferente de cero; en tanto que el valor absoluto del segundo sumando podrá hacerse menor que la unidad, con lo cual se llega exactamente a la misma contradicción antes utilizada, quedando así probada la imposibilidad de existencia de las ecuaciones [6] y [3]. En este caso demostraremos también que $M_1 + M_2 + \dots + M_N$ es divisible por un cierto número primo, p , pero que no lo es $a_0 : M$, de lo cual se seguirá, como en la demostración de la trascendencia

de e , la no anulación del primer sumando de la [6]; además, se elegirá p suficientemente grande para que el segundo sumando de la [6] llegue a ser tan pequeño como se quiera.

1.º Se trata ahora, en primer lugar, de definir M por una *generalización conveniente de la integral de Hermite*, la cual se basa en la observación de que el factor $(z-1) \dots (z-n)$ de la integral de Hermite tiene por ceros precisamente los exponentes de las potencias de e en la ecuación algebraica supuesta; según esto, lo reemplazaremos ahora por el producto formado con los exponentes de la [3], es decir, con las soluciones de la [4]:

$$(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_N) = \frac{1}{b_N} [b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N] \quad [7]$$

Como esencial en este caso, se verá que es preciso agregar como factor una potencia conveniente de b_N , lo que antes hubiera sido superfluo, puesto que $(z-1) \dots (z-n)$ era ya entero; escribiremos, pues:

$$M = \int_0^\infty \frac{e^{-z} \cdot z^{p-1} \cdot dz}{(p-1)!} [b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N]^p b_N^{(N-1)p-1} \quad [8]$$

2.º Desarrollando ahora, como antes hicimos, el integrando de M según las potencias crecientes de z , el término de menor grado, correspondiente a z^{p-1} , da, utilizando el valor Γ de la página 357:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{p-1} \cdot dz}{(p-1)!} b_0^p \cdot b_N^{(N-1)p-1} = b_0^p \cdot b_N^{(N-1)p-1}$$

Todos los demás sumandos tienen en el integrando la potencia z^p u otras de mayor grado y, por consiguiente, el factor $\frac{p!}{(p-1)!}$ multiplicado por números enteros, luego son divisibles por p . Resulta, pues, que M es un número entero seguramente no divisible por el número primo p , si aquel primer sumando $b_0^p \cdot b_N^{(N-1)p-1}$ tampoco lo es; es decir, siempre que el número primo p no sea divisor de b_0 ni de b_N . La manera más sencilla de determinar p

de modo que satisfaga a estas condiciones, puesto que $b_0 \neq 0$ y $b_N \neq 0$, es tomar

$$p > |b_0| \quad \text{y al mismo tiempo} \quad p > |b_N|.$$

Entonces, como $a_0 > 0$, se podrá lograr también que $a_0 \cdot M$ no sea divisible por p , imponiendo a éste, además, la condición

$$p > a_0,$$

por ejemplo. Como se ve, por haber infinitos números primos, se pueden satisfacer todas estas condiciones de infinitas maneras.

3.º Tenemos ahora que estudiar la formación de M_ν y ϵ_ν . Aquí aparece una modificación respecto del caso anterior, puesto que los números β_ν , que intervienen ahora, en lugar de los ν , pueden ser números complejos, y, en efecto, uno seguramente es el $i\pi$. Por consiguiente, si queremos proceder a una descomposi-

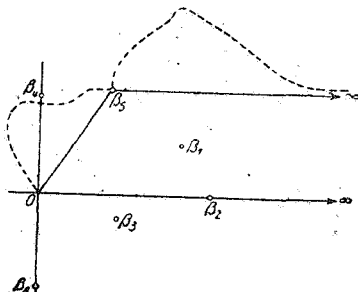


Figura 113

ción análoga del integrando M , es preciso recurrir a la *integración en el campo complejo*. Felizmente, aquí el *integrando* de nuestra integral es una *función analítica regular uniforme de la variable de integración en todo el campo finito*, que no tiene otra singularidad que el punto ∞ (en el cual la *singularidad es esencial*). En lugar de integrar en el campo real desde 0 hasta ∞ , podemos utilizar también una trayectoria cualquiera de integración que vaya de cero a ∞ , siempre que termine teniendo por asíntota una recta paralela al eje x , a la cual tienda en el sentido positivo de éste, cosa necesaria para que la integral tenga sentido, dada la naturaleza de e^{-z} en el campo complejo.

Imaginemos ahora los N puntos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ marcados sobre el plano z , y observemos que se puede obtener el valor de cada M , integrando a lo largo del segmento rectilíneo que va del origen al punto correspondiente β_ν y, luego, de la semirrecta que va desde éste paralelamente al eje real en sentido positivo. Esta trayectoria puede ser descompuesta en dos partes características respecto de M , a saber: *El segmento rectilíneo de 0 a β_ν , que da para ε_ν valores tan pequeños como se quiera al crecer p , y la semirrecta de origen β_ν , paralela al eje x , que da el número algebraico entero M_ν :*

$$\varepsilon_\nu = e^{\beta_\nu} \int_0^{\beta_\nu} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} [b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N]^p b_N^{(N-1)p-1} \quad [8a]$$

$(\nu=1, 2, \dots, N)$

$$M_\nu = e^{\beta_\nu} \int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} [b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N]^p b_N^{(N-1)p-1} \quad [8b]$$

Las relaciones [5] quedan así, en efecto, satisfechas. El haber tomado rectilíneas las trayectorias de integración ha sido simplemente por razón de comodidad; una curva arbitraria que una 0 con ∞ daría, naturalmente, el mismo valor ε_ν , pero la deducción de éste es más sencilla usando el segmento rectilíneo. También hubiéramos podido usar en vez de la semirrecta horizontal una línea cualquiera que se acercase asintóticamente a una horizontal, pero esto sería una incomodidad innecesaria.

4.º En cuanto a la *evaluación de ε_ν* , no cambia nada respecto de lo que hemos hecho anteriormente; la única diferencia es que aquí se aplica la propiedad de que el módulo de una integral compleja nunca es mayor que el máximo del valor absoluto del integrando multiplicado por la longitud de la trayectoria de integración, que en nuestro caso es $|\beta_\nu|$. El límite superior de ε_ν , así obtenido, es igual al producto de un cierto factor independiente de p por $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ (siendo G el valor máximo de

$|z(b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N) b_N^{N-1}|$ en un recinto que contiene todos los segmentos que unen el origen con los puntos β_ν); de donde se deduce como antes que, *aumentando p convenientemente, puede*

lograrse que cada ε_ν y, por consiguiente, también $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N$ llegue a ser tan pequeño como se quiera, y, en particular, que esta suma sea menor que 1.

5.º En cuanto a la investigación de los M_ν , los razonamientos difieren esencialmente de los hechos en el caso del número e , si bien pueden considerarse generalizaciones de éstos, correspondientes a que ahora, en lugar de números racionales, tenemos que utilizar números enteros algebraicos. Consideremos toda la suma :

$$\sum_{\nu=1}^N M_\nu = \sum_{\nu=1}^N e^{\beta_\nu} \int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} [b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N]^p b_N^{(N-1)p-1}$$

Sustituyendo aquí en cada sumando el polinomio en z por el producto de los factores $(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_N)$, en virtud de la [7], e introduciendo la nueva variable de integración $\zeta = z - \beta_\nu$, que es real, como consecuencia de la trayectoria de integración

supuesta para z , resulta para valor de $\sum_{\nu=1}^N M_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^N \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{(p-1)!} (\zeta + \beta_\nu)^{p-1} (\zeta + \beta_\nu - \beta_1)^p \dots \zeta^p \dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_N)^p b_N^{Np-1} \quad [9]$$

resultado que puede escribirse así :

$$\sum_{\nu=1}^N M_\nu = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{(p-1)!} \zeta^p \cdot \Phi(\zeta)$$

poniendo, para abreviar,

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^N b_N^{Np-1} (\zeta + \beta_\nu)^{p-1} (\zeta + \beta_\nu - \beta_1)^p \dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_{\nu-1})^p \dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_{\nu+1})^p \dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_N)^p \quad [9]$$

Esta suma, lo mismo que cada uno de sus N sumandos, es un polinomio en ζ . En cada sumando hay, evidentemente, una de las N magnitudes $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ que interviene de un modo especial en el factor $(\zeta + \beta_\nu)^{p-1}$, pero en la suma, considerada como

un polinomio en ζ , todas estas N magnitudes aparecen de la misma manera en los coeficientes de cada potencia de ζ , es decir, cada uno de estos coeficientes es una función simétrica de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$. La multiplicación de todos los factores, teniendo en cuenta el desarrollo de la potencia de un polinomio, permite reconocer todavía más: que estas funciones son *funciones racionales enteras de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ con coeficientes enteros*. Ahora, según una propiedad estudiada en Algebra, *las funciones simétricas racionales, con coeficientes racionales, de todas las raíces de una ecuación de coeficientes racionales son siempre números racionales*; luego, como las $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ son todas las raíces de la ecuación [4], los coeficientes de $\Phi(\zeta)$ son, en efecto, números racionales.

Pero aún no nos basta esto, sino que necesitamos que estos números sean *enteros*, y esto lo da la potencia de b_N que aparece como factor de $\Phi(\zeta)$. Y, en efecto, asociando b_N como factor a cada uno de los lineales podremos escribir:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{v=1}^N (b_N \zeta + b_N \beta_v)^{v-1} (b_N \zeta + b_N \beta_v - b_N \beta_1)^p \dots (b_N \zeta + b_N \beta_v - b_N \beta_v - 1)^p \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} [9']$$

$$(b_N \zeta + b_N \beta_v - b_N \beta_{v+1})^p \dots (b_N \zeta + b_N \beta_v - b_N \beta_N)^p$$

y tendremos entonces, análogamente a lo que acabamos de ver, que los coeficientes de este polinomio en ζ son *funciones simétricas racionales enteras de los productos $b_N \beta_1, b_N \beta_2, \dots, b_N \beta_N$ con coeficientes racionales enteros*. Estos N productos son raíces de la ecuación que se deduce de la [4] sustituyendo ε por $\frac{z}{b_N}$:

$$b_0 + b_1 \frac{z}{b_N} + \dots + b_{N-1} \left(\frac{z}{b_N}\right)^{N-1} + b_N \left(\frac{z}{b_N}\right)^N = 0,$$

la cual, por multiplicación por b_N^{N-1} se transforma en la:

$$b_0 b_N^{N-1} + b_1 b_N^{N-2} z + \dots + b_{N-2} b_N z^{N-2} +$$

$$+ b_{N-1} z^{N-1} + z^N = 0, \quad [10]$$

esto es, una ecuación con todos los coeficientes enteros, en la que el coeficiente del término de mayor grado es la unidad. Los números algebraicos que satisfacen a una ecuación de esta naturaleza, de coeficientes enteros, siendo la unidad el del término de mayor grado, se llaman *números algebraicos enteros*; se puede entonces enunciar con mayor precisión el teorema anterior, diciendo:

Las funciones simétricas enteras de todas las raíces de una ecuación de coeficientes enteros, en que el coeficiente del término de mayor grado es 1 (por tanto, de números algebraicos enteros) son números enteros.

Este teorema figura en los Tratados de Algebra, aun cuando no suela estar enunciado en esta forma precisa que le hemos dado; y en ellos puede verse con detalle la demostración.

Ahora bien, hemos visto que los coeficientes del polinomio $\Phi(\zeta)$ satisfacen a las hipótesis de este teorema, y, por lo tanto, son *números racionales enteros*, que designaremos por $A_0, A_1, \dots, A_{Np-1}$, luego tendremos:

$$\sum_{v=1}^N M_v = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta} \zeta^p d\zeta}{(p-1)!} (A_0 + A_1 \zeta + \dots + A_{Np-1} \zeta^{Np-1})$$

con lo cual hemos llegado realmente al fin de la demostración que nos proponíamos; pues, efectuando las integraciones en los numeradores teniendo en cuenta la fórmula que da el valor de la función Γ (pág. 357) resultan $p!, (p+1)!, (p+2)!, \dots$, puesto que cada término contiene una potencia de ζ de grado igual a p , por lo menos, y después de la división por $(p-1)!$, en todos los términos subsistirá, seguramente, un factor p , y los demás factores (los $A_0, A_1, \dots, A_{Np-1}$) son números enteros; por consiguiente, $\sum_{v=1}^N M_v$, es un número racional entero, seguramente divisible por p .

Recordando ahora que $a_0 \cdot M$ no es divisible por p (pág. 366) resulta que $a_0 M + \sum_{v=1}^N M_v$ es un número racional entero no divisible por p , y, por consiguiente, en particular, un número segu-

ramente distinto de cero. Resulta, pues, que no puede existir la ecuación [6]:

$$\left\{ a_0 M + \sum_{v=1}^N M_v \right\} + \left\{ \sum_{v=1}^N \varepsilon_v \right\} = 0,$$

pues la suma de un número entero no nulo y el $\sum_{v=1}^N \varepsilon_v$, que, según el número 4.º (pág. 367), seguramente puede conservarse menor que 1 en valor absoluto, nunca puede ser cero. *Queda así demostrado el caso particular antes enunciado (pág. 364) del teorema de Lindemann y, por tanto, la trascendencia de π , en él contenida.*

Señalemos aún otro caso particular interesante del teorema general de Lindemann, a saber: *dada la ecuación $e^\beta = b$, los números b y β no pueden ser simultáneamente algebraicos, salvo el caso trivial $\beta=0$, $b=1$; en otros términos, la función exponencial de un argumento algebraico, β , lo mismo que el logaritmo natural de un número algebraico, b , son siempre trascendentes, con la única excepción indicada.* En este teorema está contenida la trascendencia de e , en el caso $\beta=1$, y la de π , en el $b=-1$ (por ser $e^{i\pi} = -1$). La demostración puede hacerse por generalización de las últimas consideraciones, partiendo ahora de $b=e^\beta$ en lugar de $1+e^a$ como hicimos últimamente. Hay que tener en cuenta, entonces, además de todas las raíces de la ecuación algebraica que da las β , todas las raíces de la ecuación que da las b para llegar a una ecuación análoga a la [3], lo cual exige el empleo de mayor número de símbolos y, en consecuencia, dificulta la demostración; por lo demás, los razonamientos son idénticos en esencia.

De manera análoga puede demostrarse el *teorema más general de Lindemann.*

No hemos de entrar aquí en pormenores de la demostración, conformándonos con hacer ver del modo más intuitivo posible la significación del último teorema en lo que se refiere a la función exponencial. Imaginemos marcados sobre el eje de abscisas todos los puntos de abscisas algebraicas, x . Sabemos que ya los

puntos racionales, y también todos los números algebraicos, llenan el eje de abscisas *densamente en todas partes*; y se podría quizá creer que, por lo menos, los números algebraicos agotan todos los puntos reales del eje x ; sin embargo, nuestro teorema dice que no ocurre así, que *sobre el eje x , además de los números algebraicos, y comprendidos entre ellos, hay otra infinidad de números transcendentales*; de los cuales son ejemplos en número ilimitado los $e^{\text{num. alg.}}$ así como los $\log(\text{núm. alg.})$ y cualquier función algebraica de estos números transcendentales.

Para presentar la cuestión de la manera más intuitiva posible convendrá escribir la ecuación bajo la forma: $y=e^x$, y representarla por una *curva* en un sistema de ejes cartesianos (fig. 114).

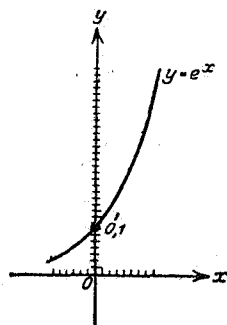


Figura 114

Imaginemos marcados sobre el eje x lo mismo que sobre el y , todos los números algebraicos, y consideremos todos los puntos (x, y) del plano cuyas dos coordenadas sean números algebraicos; estos puntos, que designaremos con la denominación de *puntos algebraicos*, cubren todo el plano xy densamente en todas sus partes. *A pesar de esta distribución densa de tales puntos en todo el plano xy , la curva exponencial $y=e^x$ no contiene ningún punto algebraico fuera del $x=0, y=1$* ; pues, según nuestro teorema, en $y=e^x$ una, por lo menos, de las magnitudes x, y es transcendente. Este comportamiento de la curva exponencial es altamente singular e interesante.

El alcance de estos teoremas, que envuelven la existencia de un gran conjunto de números que no sólo no son racionales, sino que ni siquiera pueden ser representados por operaciones alge-

braicas hechas con números enteros, es de enorme trascendencia para nuestras *ideas acerca del continuo de los números*. ¡Cómo hubiese celebrado Pitágoras un descubrimiento de esta naturaleza cuando simplemente la existencia del número irracional parecía significar, para él, una hecatombe!

Es de notar lo poco extendido y asimilado que está el concepto de trascendencia de los números, no obstante ser tan sencillo, a poco que se reflexione sobre él. Con frecuencia lo comprobamos en los exámenes: al pretender que los alumnos definan el concepto de «trascendencia», en la mayoría de los casos lo único que se logra oír es que los números trascendentes no satisfacen a ninguna ecuación algebraica; lo cual, naturalmente, es falso, como lo muestra el ejemplo $x - e = 0$. La condición esencial de que los coeficientes de la ecuación deben ser racionales es precisamente la omitida.

Volviendo ahora nuestra atención a las demostraciones relativas a la trascendencia de los números e y π , observemos que los razonamientos en ellas empleados son sencillos y elementales y presentan una unidad que facilita mucho su recuerdo. Lo único que es preciso confiar a la memoria es la integral de Hermite; después, todo se desarrolla de un modo absolutamente natural. Con este motivo hemos de hacer resaltar que, conforme a nuestras ideas fundamentales, hemos hecho uso del *concepto de integral* (hablando geoméricamente, del concepto de área) como cosa elemental; y creemos que esto ha contribuido mucho a que la exposición sea clara y sencilla; compárela, el lector, por ejemplo, con la que aparece en el tomo I de la obra citada de Weber-Wellstein o con la de mi pequeña memoria: *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1) donde, siguiendo a los libros de texto antiguos, se ha evitado el uso de la integral, reemplazándolo por evaluaciones de desarrollos en series, y no podrá menos de conceder que estas demostraciones están muy lejos de ser tan intuitivas y asimilables como las que aquí hemos dado.

Las consideraciones acerca de la distribución de los números algebraicos entre los números reales nos conducen de un modo natural a un *moderno campo de la Matemática*, del que repetida-

(1) Citado, pág. 81.

mente hemos hecho mención en el curso de estas lecciones, y sobre el cual queremos insistir : la Teoría de conjuntos.

II. Teoría de conjuntos

Las investigaciones del fundador de esta teoría, *Jorge Cantor*, de Halle, parten precisamente de consideraciones sobre la existencia de los números trascendentes (1), que arrojan sobre este hecho nueva luz, completamente distinta a la que hasta entonces iluminaba esta teoría.

La breve ojeada con que vamos a examinar la Teoría de conjuntos sólo tendrá de nuevo el hacer aparecer en primer término la *consideración de ejemplos concretos* con preferencia a las consideraciones abstractas muy generales, con las que, frecuentemente, la teoría se hace difícilmente comprensible o toma una forma extraordinariamente enojosa.

1.º Potencia de los Conjuntos

Recordemos, en primer lugar, que en repetidas ocasiones hemos tenido que manejar *diferentes sistemas característicos de números*, a los cuales, ahora, para abreviar, llamaremos *conjuntos de números*. Limitándonos solamente a los números reales, los conjuntos considerados han sido :

- 1.º Los números enteros y positivos ;
- 2.º Los números racionales ;
- 3.º Los números algebraicos ;
- 4.º Los números reales.

Cada uno de estos conjuntos contiene *infinitos números*, y la primera cuestión que ahora se presenta es ver si, a pesar de ser ilimitado el número de elementos de cada uno, tendrá algún sentido la *comparación de estos conjuntos desde el punto de vista de su magnitud o extensión*; es decir, si podrá decirse que la «*infinitud*» del uno es mayor, igual o menor que la del otro. El gran mérito de Cantor consiste, especialmente, en haber aclarado este problema, estableciendo conceptos precisos, y haberle dado so-

(1) Véase *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tomo 77, 1873, pág. 258.

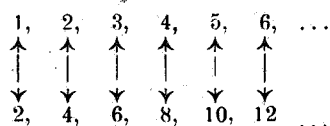
lución utilizando en primer término el concepto de «potencia» o «número cardinal» de un conjunto, que se define así :

Dos conjuntos tienen «igual potencia» (son equivalentes) cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos, es decir, cuando se puede representar uno cualquiera de ellos sobre el otro, de modo que a cada elemento de aquél corresponda uno, y uno solo, de éste, y recíprocamente. Cuando no es posible tal correspondencia o representación, los dos conjuntos tienen «potencia diferente»; y si, cualquiera que sea la naturaleza de la correspondencia ensayada, siempre quedan en uno de los conjuntos elementos sin correspondiente en el otro, se dice que éste tiene «mayor potencia» que aquél.

Aclaremos esto, en los cuatro ejemplos antes enumerados.

Parece, a primera vista, que la potencia del conjunto de los números enteros ha de ser más pequeña que la del de los racionales y ésta, a su vez, menor que la del de los algebraicos y la de éste menor todavía que la del formado por todos los números reales; puesto que cada uno de estos conjuntos se obtiene del precedente por agregación de nuevos elementos. Pero tal conclusión sería muy aventurada, ya que aun cuando *todo conjunto «finito» es de mayor potencia que cualquiera de sus partes, esta proposición cae en defecto tratándose de conjuntos infinitos*; cosa que, después de todo, no debe chocar, porque el paso de unos a otros conjuntos significa realmente el de uno a otro campo completamente diferente de la Matemática. Un ejemplo muy sencillo aclarará esto, a saber: *una parte de un conjunto infinito puede realmente tener la misma potencia que éste.*

Para ello escribamos en una fila todos los números enteros y positivos, y coloquemos debajo la serie de los números pares :



Con las dobles flechas se pone de manifiesto la correspondencia biunívoca que establecemos entre los elementos de ambos conjuntos; *por consiguiente, según la definición de Cantor, el conjunto de los números naturales tiene la misma potencia que el conjunto parcial de los números pares.*

La investigación de las potencias de estos cuatro conjuntos no es, pues, tan sencilla; por eso es tanto más admirable este sencillo resultado, que fué el gran descubrimiento de Cantor en 1873: *Los tres conjuntos de los números naturales, de los números racionales y de los números algebraicos tienen igual potencia; el conjunto de todos los números reales tiene una potencia diferente y mayor que la de éstos.* Se llama *numerable* todo conjunto cuyos elementos pueden corresponderse unívocamente con los números naturales (teniendo, por lo tanto, igual potencia que el conjunto de éstos); según esta definición, el teorema de Cantor puede ser enunciado así: *El conjunto de los números racionales, y lo mismo el de los algebraicos, es numerable; pero el formado por todos los números reales no es numerable.*

Daremos, primeramente, la *demonstración para los números*

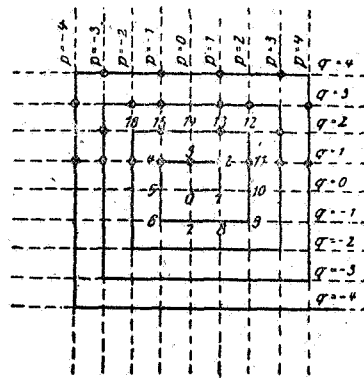


Figura 115

racionales, muy conocida ya del público matemático. Todo número racional (en ellos incluimos también los negativos) se puede representar bajo la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son primos entre sí, y q es siempre positivo (en tanto que p puede también ser nulo o negativo). Para ordenar todas estas fracciones $\frac{p}{q}$, supongamos marcados en un plano referido a dos ejes rectangulares p, q , todos los puntos (p, q) de coordenadas enteras, y supongámoslos ordenados como indica la espiral quebrada de la figura 115. Pondremos, pues, *numerar todos estos pares de valores* (p, q) de

modo que a cada par le corresponde un número entero y ningún número entero quede sin par correspondiente. Si ahora suprimimos de esta sucesión todos los pares de valores que no satisfacen a las condiciones arriba expresadas (de ser primos entre sí p y q y ser $q > 0$) y numeramos solamente todos los restantes (en la figura aparecen éstos señalados por puntos gruesos) obtenemos una sucesión que empieza así :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} & \underbrace{5} & \underbrace{6} & \underbrace{7} & \underbrace{8} & \underbrace{9} & \underbrace{10} & \underbrace{11} & \dots \\ 1, & 0, & -1, & 2, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -2, & 3, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \dots \end{array}$$

de modo que *todo número racional tiene por correspondiente un número entero y positivo; y, recíprocamente, a todo número entero y positivo corresponde un número racional, con lo cual queda demostrada la numerabilidad del conjunto de los números racionales*. Pero obsérvese que *esta ordenación de los números racionales en serie numerable destruye completamente la sucesión, que parece natural, por orden de magnitud; lo que se pone de manifiesto en la figura 116 en la cual los puntos racionales del eje de*

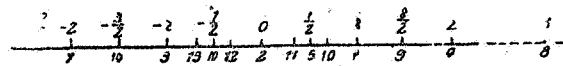


Figura 116

abscisas llevan marcado el número del lugar que ocupan en aquella ordenación convencional.

Consideremos, en segundo término, los *números algebraicos*, limitándonos a los *reales*, aunque la consideración de los complejos no sería, en el fondo, más difícil. Todo número algebraico real, w , satisface a una ecuación de coeficientes reales enteros :

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n = 0,$$

que supondremos *irreducible*; es decir, suponemos suprimidos los divisores racionales, y también el máximo común divisor de los números enteros $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$; convendremos, además, en que a_0 sea *siempre positivo*. Esto supuesto, es sabido que *todo número algebraico w satisface a una sola ecuación irreduci-*

ble de esta naturaleza, y, recíprocamente, toda ecuación de esta clase tiene, a lo sumo, n raíces que son números algebraicos reales, pudiendo ocurrir que sean en número menor o no haya ninguna. Si pudiéramos ordenar todas estas ecuaciones algebraicas en una sucesión numerable, con ello quedarían también ordenadas, evidentemente, sus raíces y, por consiguiente, también todos los números algebraicos reales.

Esta ordenación fué realizada por Cantor haciendo corresponder a cada ecuación un número positivo, N , llamado «altura», así definido :

$$N = n - 1 + a_0 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

y las ecuaciones se clasifican en una sucesión numerable de clases según los valores de la altura $N=1, 2, 3, \dots$. En cada una de estas clases, según la definición de altura, tanto el grado n como el valor absoluto de cada uno de los coeficientes tienen que ser iguales o menores que el número finito N , de modo que cada clase contendrá siempre un número finito de ecuaciones, y, por consiguiente, en particular, un número finito de ecuaciones irreducibles; los coeficientes se pueden determinar fácilmente tanteando todas las posibles soluciones de la ecuación que define N y se puede escribir inmediatamente el principio de la sucesión de las ecuaciones para los valores más bajos de N .

Ahora imaginemos determinadas, para cada valor de la altura N , las raíces reales de las ecuaciones irreducibles, en número finito, que corresponden a N , de las cuales sólo puede haber un número limitado, y supongámoslas ordenadas por orden de magnitud creciente; tomando entonces primero los números así ordenados relativos a la altura 1, después los de la altura 2, y así sucesivamente, y numerándolos siguiendo este orden queda, en efecto, numerado el conjunto de todos los números algebraicos reales, puesto que de esta manera se han considerado todos los números algebraicos reales, y, por otra parte, se han necesitado también todos los números enteros positivos como ordinales correspondientes a aquéllos. El lector que quiera verá que con un poco de paciencia puede obtener, p. ej., el 7563-ésimo número del esquema indicado o el número correspondiente a uno algebraico dado cualquiera.

También en este caso queda destruído en la enumeración el orden natural de magnitud, aun cuando se conserve en los números que corresponden a la misma altura ; así, por ejemplo, dos números tan próximos por su magnitud como $\frac{2}{5}$ y $\frac{2001}{5000}$ pertenecen, respectivamente, a las alturas 7 y 7001, que se encuentran bastante alejadas entre sí ; en tanto que $\sqrt{5}$, por ser raíz de $x^2 - 5 = 0$, tiene la misma altura, 7, que $\frac{2}{5}$.

Antes de examinar el último ejemplo vamos a ver un pequeño *lema*, que nos proporcionará otros ejemplos de *conjuntos numerables* y, al mismo tiempo, nos dará a conocer un procedimiento de demostración que más tarde hemos de utilizar.

Supongamos dados, primeramente, dos conjuntos numerables :

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{y} \quad b_1, b_2, b_3, \dots ;$$

el conjunto formado por la reunión de todas las *a* y de todas las *b* en cualquier orden es también un conjunto numerable, pues los elementos de este nuevo conjunto pueden escribirse así :

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$$

con lo cual se ve fácilmente la correspondencia biunívoca que hay entre esta sucesión y la serie de los números naturales. Del mismo modo, *el conjunto formado por la reunión de tres, cuatro, ..., y, en general, de un número finito de conjuntos numerables es también un conjunto numerable.*

Pero ya la cosa no parece tan evidente—y esto constituye el lema indicado—, que *un conjunto infinito numerable de conjuntos infinitos numerables sea a su vez conjunto numerable.* Para demostrarlo designemos por a_1, a_2, a_3, \dots los elementos del primer conjunto, por b_1, b_2, b_3, \dots los del segundo, por c_1, c_2, c_3, \dots los del tercero, y así sucesivamente, e imaginemos escritos estos diferentes conjuntos uno debajo de otro ; bastará entonces considerar todos los elementos ordenados atendiendo primero a la transversal indicada con flechas en la figura 117 contándolos

de izquierda a derecha, y dentro de cada transversal al lugar que ocupan de arriba abajo, para tenerlos en la siguiente sucesión :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} & \underbrace{5} & \underbrace{6} & \underbrace{7} & \underbrace{8} & \underbrace{9} & \underbrace{10} & \underbrace{11} & \dots, \\ a_1 & a_2 & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & a_4 & b_3 & c_2 & d_2 & a_5 & \dots, \end{array}$$

donde a cada uno de los números a, b, c, \dots le corresponde un número entero determinado y sólo uno, con lo cual queda demostrada la numerabilidad del conjunto total. Se pudiera llamar a

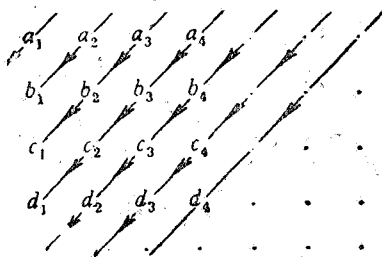


Figura 117

esta ordenación de los elementos del conjunto total *numeración por diagonales o transversales*.

La gran diversidad de conjuntos numerables que por este procedimiento podemos llegar a conocer, pudiera despertar la idea de que todos los conjuntos infinitos son numerables, pero no es así, como vamos a ver demostrando la *segunda parte del teorema de Cantor: el continuo de todos los números reales no es numerable*; designaremos este conjunto por \mathfrak{C}_1 , ya que más adelante hemos de tratar aún de conjuntos de varias dimensiones.

Definimos, pues, \mathfrak{C}_1 como *conjunto de todos los números reales finitos, x* , y podemos representar x como abscisa de un punto de un eje. Veremos, primero, que *el conjunto de todos los puntos interiores al segmento unidad, $0 < x < 1$, tiene exactamente la misma potencia que el \mathfrak{C}_1* . Para ello, imaginemos representado el conjunto de todos los números reales sobre un eje de abscisas, x , y el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 sobre un eje y , perpendicular al x , y podremos establecer una correspondencia o representación biunívoca entre ambos conjuntos por medio de una curva de ordenada monótona cre-

ciente, como la trazada en la figura 118 (podría ser, por ejemplo, una rama de $y = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \cot x$) la cual tiene por asíntotas a la izquierda la recta $y=0$ y a la derecha la $y=1$. Podremos, pues, sustituir en lugar de \mathfrak{C}_1 el conjunto de todos los números reales comprendidos entre 0 y 1, y así lo haremos en adelante.

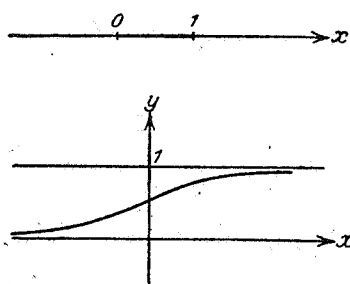


Figura 118

Veamos ahora la demostración que dió Cantor en el Congreso de Ciencias celebrado en Halle, en 1891, de la numerabilidad del conjunto \mathfrak{C}_1 , la cual es mucho más clara y general que la primitiva publicada en el año 1873. El fundamento consiste en utilizar un sencillo método, el llamado «procedimiento de las diagonales», que da para toda sucesión numerable imaginada de todos los

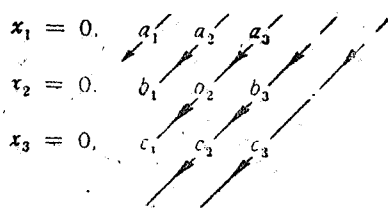


Figura 119

números reales un número real seguramente no contenido en ella; lo cual es una contradicción que demuestra que \mathfrak{C}_1 no puede ser un conjunto numerable.

Escribamos todos los números reales $0 < x < 1$ de \mathfrak{C}_1 en forma de fracción sistemática decimal y supongamos que todos ellos figuran en una sucesión numerable, como la de la figura 119,

donde a, b, c, \dots son las cifras 0, 1, 2, ..., 9 en un orden y disposición cualquiera. Debemos advertir, sin embargo, en primer lugar, que *la escritura decimal no define unívocamente el número*, puesto que, por ejemplo, por definición es $0,999\dots=1,000\dots$ y, en general, toda fracción de un número limitado de cifras puede ser sustituida por la que resulta de disminuir en 1 su última cifra, agregando un número indefinido de nueves. Esto es, después de todo, uno de los principios fundamentales del Cálculo con fracciones decimales (véase págs. 47 y 48). Para evitar esto y llegar a una *notación unívoca*, convendremos de una vez para siempre en *emplear solamente fracciones decimales de un número ilimitado de cifras*; por consiguiente, en lugar de las fracciones limitadas, las que a partir de una cifra tienen todas las siguientes, en número infinito, nueves. Tales fracciones supondremos son las que aparecen representadas en el anterior esquema numerable:

Para formar ahora una *fracción decimal*, x' , distinta de todos los números que aparecen en el esquema, tracemos la diagonal (que da nombre al procedimiento) en que se hallan las cifras a_1, b_2, c_3, \dots y coloquemos como primera cifra de x' una, a'_1 , diferente de a_1 ; como segunda cifra, una, b'_2 , distinta de la b_1 ; en el tercer lugar, una, c'_3 , diferente de la c_1 , y así sucesivamente:

$$x' = 0, a'_1, b'_2, c'_3 \dots$$

Estas condiciones a que sometemos las cifras a'_1, b'_2, c'_3, \dots nos dejan todavía suficiente libertad para que podamos lograr que x' sea una *fracción decimal propia no igual*, por ejemplo, a $0,999\dots=1$, ni resulte con un número limitado de cifras; podemos hasta llegar a suponer que a'_1, b'_2, c'_3, \dots son todas cifras diferentes de 0 y de 9. Entonces, *es seguramente x' distinto de x* , puesto que ambos tienen las primeras cifras, a_1 y a'_1 , diferentes, y dos números que son fracciones decimales ilimitadas solamente pueden ser iguales cuando las cifras del mismo orden decimal son idénticas; por la diferencia de las segundas cifras tampoco es $x'=x_2$, y por las terceras es $x' \neq x_3$ y así siguiendo se tiene que x' es diferente de todos los números de la sucesión numerable x_1, x_2, x_3, \dots , siendo, sin embargo, una *fracción decimal*

propia. Con esto queda de manifiesto la contradicción buscada y, por lo tanto, demostrada la *no numerabilidad del continuo* \mathfrak{C}_1 .

Esta proposición asegura *a priori* la existencia de números *transcendentes*, pues el conjunto de los números algebraicos era numerable y, por consiguiente, no puede contener todos los números del continuo no numerable de todos los números reales. Pero mientras todo lo dicho anteriormente nos daba a conocer solamente una *infinidad numerable de números transcendentés*, se sigue de lo ahora expuesto que *la potencia de su conjunto es realmente mayor*, de manera que ahora es cuando percibimos claramente su naturaleza; por otra parte, los ejemplos particulares indicados dan vida a la imagen algo abstracta que de otro modo tendríamos de estos números (1).

Después de haber hablado del continuo de una dimensión, toca ahora referirnos al *continuo de dos dimensiones*; en esto, todo el mundo había creído que el plano contiene más puntos que

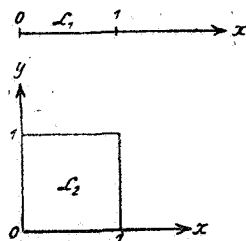


Figura 120

la recta, y así es natural que se produjera gran estupefacción cuando Cantor demostró (2) que *la potencia del continuo bidimensional* \mathfrak{C}_2 *es exactamente igual a la del continuo unidimensional* \mathfrak{C}_1 . Si tomamos para \mathfrak{C}_2 el *cuadrado de lado unidad* y para \mathfrak{C}_1 el *segmento unidad* (fig. 120), deberá, pues, poder establecerse una correspondencia biunívoca entre los puntos de los dos conjuntos. Lo paradójico de esto se explica porque no es

(1) La existencia de números transcendentés fué demostrada por primera vez por Liouville, que dió en 1851 en el *Journal des mathématiques pures et appliquées* un procedimiento muy elemental para la construcción de estos números.

(2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tomo 84, 1878, pág. 242 y sig.

fácil despojarnos de la idea de una cierta *continuidad de la correspondencia*, pero la relación que vamos a establecer es, realmente, *todo lo discontinua*, y, si se permite la frase, *lo inorgánica posible*; destruye todo lo que tienen de característico la serie rectilínea y la figura plana con excepción de la «potencia», algo así como si metiéramos todos los puntos del cuadrado en un saco y lo sacudiésemos fuertemente hasta que se fuesen al fondo.

El conjunto de los puntos del cuadrado coincide con el de todos los pares de valores de fracciones decimales :

$$x=0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad y=0, b_1 b_2 b_3 \dots,$$

que, como antes, suponemos formadas por un número ilimitado de cifras; excluimos, por lo tanto, los puntos situados en los lados del cuadrado, que tienen una coordenada nula, es decir, los dos concurrentes en 0, pero se reconoce fácilmente que esto no altera la potencia. *La idea fundamental de la demostración de Cantor es formar con ambos decimales una nueva fracción decimal, z, de la cual pueden deducirse sin ambigüedad los valores x e y, de modo que z pase una vez por cada uno de los valores $0 < z \leq 1$, cuando el punto (x, y) toma todas las posiciones posibles dentro del cuadrado.* Suponiendo entonces que z sea la abscisa de un punto, se tendrá con ello realizada la correspondencia biunívoca entre el cuadrado \mathfrak{C}_2 y el segmento unidad \mathfrak{C}_1 , no contando como perteneciente a éste, de acuerdo con la hipótesis hecha respecto del cuadrado, más extremo que el $z=1$.

Se logra esta *fusión* de las fracciones decimales x, y escribiendo :

$$z=0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots,$$

de la cual, en efecto, por supresión de las cifras de lugar par o de lugar impar se obtienen, respectivamente, sin ambigüedad, los valores x, y. Sin embargo, aparece aquí *una dificultad que proviene de los dos modos de escribir una fracción decimal*. Esta z no recorre absolutamente todo el conjunto \mathfrak{C}_1 cuando tomamos para (x, y) todos los pares de valores de fracciones de ilimitadas cifras, o sea todos los puntos del conjunto \mathfrak{C}_2 , puesto

que z está, en efecto, siempre representado por una fracción ilimitada, pero hay entre éstas valores tales como :

$$x = 0, c_1 c_2 0 c_4 0 c_6 0 c_8, \dots,$$

que resultan de una fracción ilimitada, x , y de una ilimitada, y :

$$x = 0, c_1 0 0 0 \dots, \quad y = 0, c_2 c_4 c_6, \dots,$$

Esta dificultad se puede eludir fácilmente mediante el artificio propuesto por *J. König*, de Budapest, quien considera las a, b, c, \dots no como cifras aisladas siempre, sino como *complejos de cifras*, lo que podríamos llamar «*moléculas*» de la fracción decimal, y entonces, teniendo en cuenta el papel desempeñado por los ceros, *siempre que una cifra diferente de cero figure en la fracción decimal precedida de varios ceros, considera formada una molécula de la fracción por el conjunto de la cifra y estos ceros*; así, por ejemplo, en la fracción :

$$x = 0, 3208007000302405 \dots,$$

hay que tomar como moléculas :

$$a_1 = [3], a_2 = [2], a_3 = [08], a_4 = [007], a_5 = [0003], \\ a_6 = [02], a_7 = [4], a_8 = [05], \dots$$

Veamos ahora lo que *realmente significan* a, b, c, \dots , como tales *moléculas* en la aplicación de la regla que establece la correspondencia de los pares (x, y) con z . A cada par (x, y) le corresponde unívocamente una fracción ilimitada z , y, recíprocamente, ésta determina los valores de x, y . Pero, ahora, la descomposición de z en x, y hace que cada uno de estos valores tenga infinitas «*moléculas*» y, por consiguiente, x, y vendrán representadas por todas las fracciones decimales, luego, realmente, *el segmento y el cuadrado se pueden representar uno sobre otro unívocamente, es decir, tienen la misma potencia*.

Naturalmente, se puede probar de un modo completamente análogo que *también el continuo de 3, 4, 5, ... dimensiones tiene la misma potencia que el de una dimensión*. Pero lo más notable es que *también el continuo \mathfrak{S}_∞ de una infinidad numerable de*

dimensiones tiene esta misma potencia. Este espacio de infinitas dimensiones está definido como el conjunto de todos los sistemas de valores que puede tomar la infinidad numerable de las variables :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

cuando se supone que cada una de ellas pasa por todos los valores reales. Realmente, esto es un nuevo modo de expresar un concepto hace tiempo usado en la Matemática, pues siempre se han considerado los conjuntos de todas las series potenciales o series trigonométricas, y el infinito numerable de sus coeficientes no es otra cosa que otras tantas variables independientes, siquiera aparezcan en las aplicaciones ligadas siempre a ciertas condiciones de convergencia.

También aquí nos limitaremos al «cubo unidad» del conjunto \mathfrak{C}_∞ , es decir, al conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a las condiciones $0 < x_n \leq 1$, y probaremos que se pueden hacer corresponder unívocamente con los puntos del segmento unidad \mathfrak{C}_1 (en este caso, y por razón de comodidad, excluimos todos los puntos que tienen nula una de las coordenadas x_n y el $z=0$). Partimos, como antes, de la representación en fracción decimal de las coordenadas de los puntos de \mathfrak{C}_∞ :

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \\ x_2 = 0, \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \\ x_3 = 0, \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

y, además, supondremos como anteriormente que a, b, c, \dots , representan «moléculas» de la fracción respectiva en el sentido ya explicado, es decir, «complejos» de cifras que terminan en una diferente de 0 que está precedida de sólo ceros. Para formar una fracción ilimitada con todas las infinitas moléculas que integran cada una de las fracciones x_n de modo que se reconozca fácilmente cómo ha sido engendrada partiendo de éstas, recurrimos al procedimiento de las *transversales* o diagonales ya aplicado antes. Escribiremos una fracción decimal ilimitada, x , tomando las moléculas de las diferentes fracciones x_n en el orden en que

aparecen en las transversales contando de arriba a abajo y de izquierda a derecha, resultando para el sistema de valores propuestos el número:

$$x=0, a_1 a_2 b_1 a_3 b_2 c_1 a_4 b_3 c_2 d_1 a_5, \dots,$$

con lo cual a cada punto de \mathfrak{C}_∞ le corresponde unívocamente un punto de \mathfrak{C}_1 . Procediendo de modo inverso se obtiene cada punto, z , de \mathfrak{C}_1 ; pues de su expresión decimal indefinida se pueden deducir sin ambigüedad infinitas fracciones decimales indefinidas x_1, x_2, x_3, \dots , con las cuales se obtiene, por el procedimiento indicado, el punto z . *Queda, pues, con esto demostrada la posibilidad de la representación biunívoca del cubo unidad de \mathfrak{C}_∞ sobre el segmento unidad de \mathfrak{C}_1 .*

De todo lo dicho hasta aquí se infiere que, *en todo caso, hay dos potencias diferentes de conjuntos:*

1.º *La de los conjuntos numerables.*

2.º *La de todos conjuntos continuos $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \dots$, incluso \mathfrak{C}_∞ .*

Se suscita aquí, naturalmente, la cuestión de si no existirán conjuntos de *mayor potencia* que éstos; y, en efecto, se puede probar, no sólo por consideraciones abstractas, sino manteniéndose dentro del campo de los conceptos de uso constante en la Matemática, que hay todavía otros conjuntos de mayor potencia que los que acabamos de señalar, a saber:

3.º *El conjunto de todas las funciones reales posibles de una variable real.*

Para verlo, basta limitarse al intervalo $0 < x < 1$ de la variable. Si consideramos primeramente el conjunto de todas las funciones continuas, se verifica este notable teorema: *el conjunto de todas las funciones continuas tiene la potencia del continuo, y, por consiguiente, pertenece al grupo segundo.* Para llegar a una potencia mayor, es preciso considerar también funciones absolutamente discontinuas de la clase más general que se puede concebir, es decir, tales que a cada punto le corresponde un valor de la función completamente arbitrario, sin relación alguna con los valores que toma esta función en puntos próximos a aquél.

Vamos a demostrar, primero, el teorema relativo *al conjunto de todas las funciones continuas*; esta demostración se obtiene

repetiendo y afinando algunos razonamientos ya expuestos (página 307) al hablar de la posibilidad del desarrollo de funciones «arbitrarias» en series trigonométricas. Vimos entonces, que:

a) Una función continua, $f(x)$, está determinada cuando sólo se conocen los valores $f(r)$ en todos los puntos racionales, r .

b) Sabemos ahora, que todos los valores racionales pueden ordenarse en una sucesión numerable.

c) Por consiguiente, $f(x)$ está determinada cuando se conoce la sucesión numerable de sus valores $f(r_1), f(r_2), f(r_3), \dots$. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que no se pueden suponer completamente arbitrarios estos valores, si queremos obtener una función uniforme y continua; el conjunto de todos los sistemas

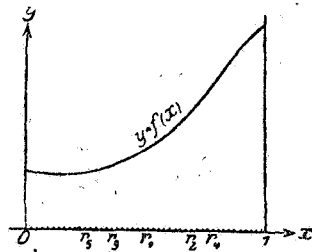


Figura 121

posibles de valores contiene siempre un conjunto parcial que es de igual potencia que el conjunto de todas las funciones continuas (fig. 121).

d) Podemos ahora considerar los valores $f_1=f(r_1), f_2=f(r_2), \dots$, como coordenadas de un \mathfrak{C}_∞ , puesto que representan una sucesión numerable de infinitas variables continuas; luego, según el teorema demostrado hace poco, la totalidad de los sistemas posibles de sus valores tiene la potencia del continuo.

e) Conjunto parcial de este conjunto, en correspondencia unívoca con el continuo, es, por lo tanto, el conjunto de todas las funciones continuas unívocamente representable sobre un conjunto parcial del continuo.

f) Fácilmente se comprende ahora que, recíprocamente, también la totalidad del continuo es representable unívocamente sobre un conjunto parcial de las funciones continuas. Basta para ello considerar las funciones definidas por $f(x)=k=\text{const.}$, donde

k es un parámetro real; cuando k recorre el continuo \mathfrak{C}_1 , la función $f(x)=k$ recorre, en efecto, un conjunto parcial del conjunto de todas las funciones continuas, representable unívocamente sobre \mathfrak{C}_1 .

Ahora tenemos que aplicar un importante teorema general de la teoría de conjuntos, el llamado *teorema de equivalencia*, demostrado por *F. Bernstein* (1).

Si dos conjuntos son tales que cada uno de ellos es equivalente a una parte del otro, los dos conjuntos son equivalentes entre sí. Este teorema es de gran aplicación, pero nos limitamos a enunciarlo porque su demostración nos llevaría demasiado lejos.

g) El continuo \mathfrak{C}_1 y el conjunto de todas las funciones continuas están, según e) y f), precisamente en la relación supuesta en el teorema de equivalencia; por consiguiente, *ambos conjuntos son de la misma potencia*, como queríamos demostrar.

Pasamos ahora a la demostración, más interesante, de nuestra segunda afirmación: que *el conjunto de todas las funciones posibles y realmente «completamente arbitrarias», tiene una potencia mayor que la del continuo.* La demostración es una aplicación exacta del procedimiento de las diagonales, de Cantor.

a) Supongamos que nuestra afirmación sea falsa, es decir, que el conjunto de todas estas funciones se pueda hacer corresponder biunívocamente con el continuo \mathfrak{C}_1 ; en esta representación a cada punto $x=v$ de \mathfrak{C}_1 corresponde la función $f(x, v)$ de x , de modo que al recorrer v el continuo, $f(x, v)$ representa todas las funciones reales posibles de x . Vamos a probar que esta hipótesis conduce a un absurdo, el de que realmente se puede construir una función real, $F(x)$, que sea seguramente distinta de todas las funciones $f(x, v)$.

b) Para ello formemos la *función diagonal* del esquema de las funciones $f(x, v)$, es decir, la función que en cada punto $x=x_0$ tiene por valor el que en el punto $x=x_0$ toma la función $f(x, x_0)$ que corresponde al parámetro $v=x_0$; por tanto, el valor $f(x_0, x_0)$. Al expresarla como función de x se escribe, pues, sencillamente $f(x, x)$.

(1) Publicado por primera vez en: *Borel*, *Leçons sur la théorie des fonctions*, París, 1888, pág. 103 y sig.

c) Formemos, ahora, una función, $F(x)$, que en cada punto x tome un valor distinto del $f(x, x)$:

$$F(x) \neq f(x, x) \text{ para cada valor de } x.$$

Esto se puede conseguir de infinitas maneras, puesto que hemos admitido funciones discontinuas en las cuales a cada valor x podemos hacer corresponder un valor completamente arbitrario de la función: un ejemplo pudiera ser:

$$F(x) = f(x, x) + 1$$

d) Esta función es, en efecto, diferente de cada una de las funciones $f(x, v)$, pues si fuera $F(x) = f(x, v_0)$ para un valor determinado $v = v_0$, también serían iguales los valores de estas funciones en el punto $x = v_0$ y, por tanto, $F(v_0) = f(v_0, v_0)$, lo cual está en contradicción con la hipótesis c) sobre la constitución de la función $F(x)$.

Queda así establecida la falsedad de la hipótesis a), de que con las funciones $f(x, v)$ se agoten todas las funciones reales de la variable x , y, por lo tanto, demostrada nuestra proposición.

Es interesante comparar esta demostración con la de la innumerabilidad del continuo. Así como allí suponíamos ordenadas todas las fracciones decimales ilimitadas en un esquema numerable, consideramos ahora el esquema de las funciones $f(x, v)$, a la generación de una fracción por los elementos diagonales corresponde aquí la constitución de la «función diagonal» $f(x, x)$ y en uno y otro caso se obtiene un nuevo elemento (fracción decimal en un caso, función en el otro) no contenido en el esquema respectivo.

Esto conduce fácilmente a pensar que *por consideraciones análogas será posible llegar a conjuntos infinitos de potencias cada vez mayores* y sobrepasar las tres clases de potencias hasta ahora obtenidas. Pero lo más digno de observación en todos estos resultados es realmente *la existencia de diferencias y categorías invariables en los diferentes conjuntos infinitos*, cualquiera que sea el modo de considerar estos conjuntos, por profundo que sea su análisis y potentes los medios que se empleen para destruir todas las particularidades, como la ordenación y análo-

gas, aun llegando a ver la sola existencia de sus elementos aislados, de sus átomos, podría decirse, como completamente independientes unos de otros, a modo de ceros arbitrariamente revueltos; y es también importante que puedan establecerse *tres de estas categorías dentro de los entes familiares en las Matemáticas*: los números enteros, el continuo y las funciones.

Terminamos con esto lo que nos proponíamos decir acerca del concepto de potencia de un conjunto, y vamos ahora, procediendo también muy concretamente, a decir algo, muy poco, acerca de otra rama de la teoría de los conjuntos.

2.º Ordenación de los elementos de un conjunto

Vamos a examinar, en primer término, una cuestión de que hasta aquí hemos prescindido, a saber: *cómo distinguir unos de otros los conjuntos de igual potencia*, por las relaciones mutuas de ordenación que desde su origen llevan consigo sus elementos. Las representaciones biunívocas más generales admitidas hasta ahora habían destruído todas estas relaciones; basta para convencerse que el lector recuerde la representación del cuadrado sobre el segmento. Quisiéramos hacer resaltar *la significación de esta parte de la Teoría de conjuntos*, pues, indudablemente, no puede ser objeto de la Teoría de conjuntos desterrar los caracteres usuales, conocidos desde la antigüedad en la Matemática, sustituyéndolos por conceptos nuevos y más generales; por el contrario, lo que puede y debe hacer es contribuir a que, por estos mismos conceptos, se lleguen a establecer con todo rigor aquellos caracteres, partiendo de sus propiedades consideradas desde puntos de vista más generales.

Vamos ahora a aclarar mediante ejemplos concretos y muy conocidos las *diferentes disposiciones u ordenaciones posibles*. Empezaremos con los *conjuntos numerables*, de los cuales conocemos *tres formas de disposición fundamentalmente distintas*; tan diferentes, que la coincidencia de sus potencias, como ya hemos visto, constituía un teorema especial, que no es de evidencia inmediata; estos conjuntos son:

1.º *El conjunto de los números enteros positivos.*

2.º El conjunto de todos los números enteros (positivos y negativos).

3.º El conjunto de todos los números racionales y el de todos los números algebraicos.

Todos estos conjuntos tienen, desde luego, en lo que se refiere a ordenación de sus elementos, una propiedad común, en virtud de la cual se les designa como *simplemente ordenados*: Tomados dos elementos cualesquiera, siempre se puede distinguir cuál de ellos precede al otro, o expresado aritméticamente, cuál es el menor y cuál es el mayor; y, además, dados tres elementos a , b y c , si a precede a b y b precede a c , también a precede a c (si $a < b$ y $b < c$ es también $a < c$).

Veamos, ahora, las *diferencias características*: en el primero existe un *primer elemento* (el uno), el cual precede a todos los demás, pero no hay ningún *elemento último* que siga a todos los demás; en el segundo conjunto *no existe ningún elemento primero, ni tampoco un último*; pero es carácter común a ambos conjuntos que a cada elemento le sigue otro determinado y, asimismo, a cada uno le precede siempre otro determinado (sin otra excepción que el 1 en el primer conjunto). En contraposición con esto, como ya vimos incidentalmente (pág. 42), en el tercer conjunto *entre cada dos elementos cualesquiera siempre hay otros en número infinito* (a estos conjuntos los llamábamos *densos en todas partes*), de modo que, en particular, *entre todos los números racionales o algebraicos comprendidos entre a y b* (cuando no se cuentan estos dos números) *no hay ninguno mayor, ni ninguno menor que todos los demás*. Las maneras de ordenación de estos tres ejemplos, sus *tipos de ordenación* son, por lo tanto, completamente distintos, aunque los tres conjuntos tienen igual potencia; a esta cuestión podría ligarse, y así lo hacen realmente los tratadistas de los conjuntos, la de *determinar todos los diferentes tipos de ordenación de los conjuntos numerables*.

Pasemos, ahora, al estudio de los *conjuntos que tienen la potencia del continuo*. Conocemos un conjunto simplemente ordenado, el continuo \mathfrak{C}_1 de todos los números reales; análogamente, los continuos de dos o más dimensiones \mathfrak{C}_2 , \mathfrak{C}_3 , ..., son ejemplos de otra ordenación que la sencilla del conjunto de los núme-

ros reales; en \mathfrak{C}_2 , por ejemplo, son necesarias, no ya una, sino dos relaciones para determinar la posición relativa de dos puntos.

Lo principal en esto es analizar *el concepto de continuidad del continuo unidimensional*; el reconocimiento que de tal concepto sólo se apoya realmente en propiedades elementales de la ordenación característica del continuo \mathfrak{C}_1 es la primera gran contribución de la Teoría de conjuntos al esclarecimiento de los conceptos matemáticos usuales. Se encuentra, en efecto, que *todas las propiedades de la continuidad del continuo ordinariamente utilizado se basan en que éste es un conjunto simplemente ordenado con las dos propiedades siguientes*:

1.º *Si se divide el conjunto en dos partes A y B, de tal modo que todo elemento pertenece a una u otra parte y que todos los elementos de A preceden a todos los de B, hay un último elemento en A o un primer elemento en B.* Recordando la definición de Dedekind de los números irracionales (pág. 47), podemos enunciar brevemente esto diciendo que toda «cortadura» en nuestro conjunto está realmente producida por un elemento del mismo.

2.º *Entre dos elementos cualesquiera del conjunto siempre hay infinitos otros.*

Esta segunda propiedad es común al continuo y al conjunto numerable de todos los números racionales; pero la primera constituye la diferencia esencial. Todos los conjuntos simplemente ordenados que poseen estas dos propiedades se llaman, en la Teoría de conjuntos, *continuos*; pues, realmente, se pueden demostrar para ellos todos los teoremas válidos para el continuo por razón de su continuidad.

Añadamos aún que estas propiedades de la continuidad se pueden formular de otra manera utilizando las *sucesiones fundamentales de Cantor*. Una sucesión fundamental es una sucesión numerable simplemente ordenada de elementos a_1, a_2, a_3, \dots del conjunto, tales que en éste cada uno de ellos precede (o sigue) al siguiente:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots \quad \text{o} \quad a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

Un elemento, a , del conjunto se llama *elemento límite de la sucesión fundamental* cuando (en la primera sucesión) *todo elemen-*

to del conjunto, anterior al a , llega a ser superado por elementos de la sucesión fundamental, pero no hay ningún elemento posterior al a ; cosa análoga se dice para la segunda sucesión. Cuando un conjunto es tal que toda sucesión fundamental del mismo tiene un elemento límite, se dice que es *cerrado*; si, recíprocamente, cada elemento es límite de una sucesión fundamental, el conjunto se llama *denso en sí mismo*. La continuidad de los conjuntos que tienen la potencia del continuo estriba esencialmente en la asociación de estas dos propiedades.

Recordemos, siquiera sea incidentalmente, que en la fundamentación del Cálculo diferencial e integral también hemos hablado de otro conjunto, el *continuo de «Veronese»*, el cual se deduce del continuo ordinario por agregación de infinitamente pequeños actuales; este continuo constituye, en efecto, un conjunto simplemente ordenado, puesto que está perfectamente determinada la sucesión de dos elementos cualesquiera, pero naturalmente es de un *tipo de ordenación completamente distinto que el continuo ordinario \mathfrak{C}_1* ; la misma proposición de que toda sucesión fundamental tiene un elemento límite no se verifica en este caso.

Pasemos ahora a otra importante cuestión: *¿Qué representaciones ponen de manifiesto la diferencia entre los distintos continuos \mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_2 , ...?* Sabemos ya que la representación biunívoca más general borra aquí toda diferencia, y se verifica este teorema, de gran importancia: *El número de dimensiones del continuo es invariante en todas las correspondencias biunívocas y continuas, es decir, que es imposible establecer una representación biunívoca y continua entre \mathfrak{C}_n y \mathfrak{C}_m cuando es $m \neq n$* . A primera vista parece que esta proposición podría admitirse como evidente, pero conviene recordar que la simple intuición también parecía excluir la posibilidad de una representación biunívoca de \mathfrak{C}_2 sobre \mathfrak{C}_1 , lo cual obliga a mantener cierta cautela frente a los resultados de la sola intuición.

Vamos a tratar aquí con detalle solamente el caso más sencillo (1), en que se trata de la relación entre los continuos de una y dos dimensiones e indicaremos brevemente las dificultades

(1) L. E. J. Brouwer ha dado una demostración para el caso general, en Math. Ann., tomo LXX, 1911, pág. 161.

que surgen al tratar de extender la demostración al caso más general. *Demostraremos, por consiguiente, que no es posible establecer una relación biunívoca y continua entre \mathfrak{C}_1 y \mathfrak{C}_2 , y nótese que no se puede suprimir nada en este enunciado, puesto que no se puede prescindir de la continuidad es cosa que ya hemos visto, y en cuanto a la uniformidad en los dos sentidos, el ejemplo tan conocido de la «curva de Peano» muestra que también debe ser tenida en cuenta.*

Establezcamos primero un lema: Sean \mathfrak{C}_1 y \mathfrak{C}'_1 dos continuos unidimensionales que pueden representarse el uno sobre el otro de un modo continuo, de tal manera que *a todo elemento de \mathfrak{C}'_1 corresponda seguramente uno y uno solo de \mathfrak{C}_1 y a cada elemento de \mathfrak{C}_1 corresponda a lo más un elemento de \mathfrak{C}'_1 ; entonces, si a y b son dos elementos de \mathfrak{C}_1 a los cuales corresponden en \mathfrak{C}'_1 realmente los dos elementos a' y b' , respectivamente, a todo elemento, c , de \mathfrak{C}_1 comprendido entre a y b corresponderá necesariamente un elemento c' de \mathfrak{C}'_1 situado entre a' y b' (fig. 122). Este teorema corresponde a otro muy conocido, que*

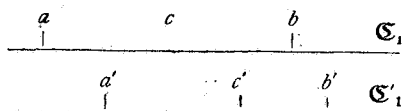


Figura 122

dice que una función continua $f(x)$, que en puntos $x=a'$, b' , toma los valores a , b , toma en un cierto punto c' comprendido entre a' y b' el valor prefijado c , cualquiera que sea, comprendido entre los a y b ; y puede, en efecto, demostrarse como una verdadera generalización de este teorema, sin más que partir del concepto de continuidad de una correspondencia entre conjuntos continuos, definido de una manera completamente análoga a la continuidad de una función, lo que únicamente puede hacerse basándose en el concepto de ordenación; pero no es éste lugar a propósito para pasar de estas indicaciones.

Vamos, pues, a nuestra demostración. Supongamos que el segmento \mathfrak{C}_1 y el cuadrado \mathfrak{C}_2 están en correspondencia biunívoca y continua (fig. 123) y que dos elementos, a y b , de \mathfrak{C}_1 , ten-

gan por homólogos en \mathfrak{C}_2 los A y B ; podemos unir estos dos elementos A y B por dos líneas diferentes que estén en el interior de \mathfrak{C}_2 , por ejemplo, las líneas quebradas representadas en la figura por \mathfrak{C}'_1 y \mathfrak{C}'_2 . Para ello no hace falta suponer ninguna propiedad especial de \mathfrak{C}_2 como una determinación de coordenadas o cosa parecida, sino que basta utilizar el concepto de la doble ordenación de \mathfrak{C}_2 . Se llega entonces a la conclusión de que tanto \mathfrak{C}'_1 como \mathfrak{C}'_2 son continuos de una dimensión simplemente ordenados, lo mismo que \mathfrak{C}_1 , y en virtud de la relación biunívoca y continua supuesta entre \mathfrak{C}_1 y \mathfrak{C}_2 , a cada elemento de \mathfrak{C}'_1 o \mathfrak{C}'_2 debe corresponder un punto sobre \mathfrak{C}_1 , pero a cada elemento de éste uno, a lo sumo, sobre \mathfrak{C}'_1 o \mathfrak{C}'_2 . Por consiguiente, estamos

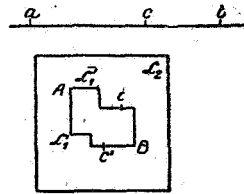


Figura 123

exactamente en las hipótesis de nuestro lema y, en consecuencia, a cada punto, c , de \mathfrak{C}_1 , comprendido entre a y b , le corresponde un punto, c' , en \mathfrak{C}'_1 y uno c'' ; en \mathfrak{C}'_2 , resultado en contradicción con la uniformidad en los dos sentidos supuesta en la correspondencia entre los conjuntos \mathfrak{C}_1 y \mathfrak{C}_2 ; luego no es posible esta representación, con lo cual queda demostrado el teorema.

Si queremos extender este método de demostración a dos continuos cualesquiera, \mathfrak{C}_m y \mathfrak{C}_n , debemos saber antes cómo pueden ser los continuos más generales de $1, 2, \dots, m-1$ dimensiones contenidos en \mathfrak{C}_m ; así, cuando son m y $n \geq 2$, no se puede utilizar ya el concepto *entre*, como se hacía en el caso más sencillo. Se llega, entonces, a investigaciones de una enorme dificultad, que aun en los primeros casos comprenden *cuestiones fundamentales de Geometría*, modernamente puestas en claro; a saber, las relativas a los conjuntos unidimensionales continuos de puntos más generales en el plano; en particular, a la investi-

ción de los casos en que tales conjuntos pueden considerarse como *curvas*.

Terminamos con esto lo que nos proponíamos decir sobre la Teoría de conjuntos; y vamos a añadir ahora algunas observaciones generales sobre la misma. Señalemos, en primer lugar, las ideas de Cantor acerca de la *posición de esta teoría respecto del Análisis y de la Geometría*, las cuales dan idea clara de la significación de esta teoría. Tanto la historia de la Matemática como todas las especulaciones de los filósofos sobre la naturaleza de la misma han establecido claramente la distinción entre las *magnitudes discretas, de la Aritmética*, y las *continuas, de la Geometría*. Modernamente se han vuelto a colocar en primer término las *magnitudes discretas como las de concepción más sencilla*, mirando a los números naturales como los conceptos primitivos más sencillos, de los cuales se van deduciendo, de la manera conocida, los números racionales y los irracionales, llegando finalmente a construir el instrumento que subordina la Geometría al Análisis, constituyéndose la Geometría analítica. La tendencia de este desarrollo moderno puede designarse como una *aritmétización de la Geometría: La idea geométrica de la continuidad viene a reducirse al concepto del número entero*; así hemos procedido, en lo fundamental, en el curso de estas lecciones.

Frénte a esta posición preferente dada a los números enteros, quería Cantor—como dijo ocasionalmente en el Congreso de Ciencias celebrado en Cassel en el año 1903—lograr la *«verdadera fusión de la Aritmética y de la Geometría» en la Teoría de conjuntos*; es decir, establecer la teoría de los números enteros de una parte y la teoría de los diferentes continuos de puntos por otra, y asimismo otras, formando capítulos coexistentes, de igual valor unos que otros, constituyendo todos una teoría general de los conjuntos.

Agreguemos algo sobre las *relaciones entre la Teoría de conjuntos y la Geometría*. En la teoría de conjuntos habíamos estudiado.

1.º *La potencia de los conjuntos*, como carácter que se conserva en toda correspondencia o representación biunívoca.

2.º *Los tipos de ordenación de los conjuntos*, que tienen en cuenta las relaciones de orden de los elementos del conjunto. En-

tre éstas pudieran caracterizarse el *concepto de continuidad*, las distintas disposiciones múltiples o *continuas de diferentes disposiciones*, etc.; y también, en general, los *invariantes de las correspondencias continuas*. Llevadas a la Geometría estas ideas dan origen a la disciplina denominada desde Riemann *Análisis situs*, que forma el capítulo más abstracto de la Geometría, en el cual sólo se trata de las propiedades invariantes en las representaciones unívocas y continuas más generales de las figuras geométricas. En estos estudios Riemann había ya usado la palabra *variedad* en un sentido muy general; la misma denominación fué empleada al principio también por Cantor, quien poco más tarde lo reemplazó por otra más cómoda, por la palabra conjunto. Hoy se ha generalizado ya tanto la palabra *conjunto* que al que utiliza la palabra *variedad* se le tiene por anticuado.

3.º Pasando, ahora, a la *Geometría concreta*, en ella aparece la diferencia entre *Geometría métrica* y *Geometría proyectiva*. No basta saber aquí que, por ejemplo, la recta es unidimensional y el plano bidimensional sino que se trata de la *construcción y comparación de las figuras* disponiéndose para ello de una *escala fija*, o, por lo menos, se quiere fijar la posición de *rectas en el plano* y *planos en el espacio*. Para cada uno de estos campos geométricos concretos se hace precisa, naturalmente, una *axiomática especial para las propiedades generales de ordenación*. Esto significa, por consiguiente, otro desarrollo de la Teoría de los conjuntos continuos simple, doble, ... múltiplemente ordenados.

No es de este lugar entrar en pormenores acerca de las materias que acabamos de mencionar y que habrán de ser tratadas en el segundo tomo de esta obra; tan sólo me limitaré a citar algunas obras en las que pueden hallarse completa información. Figuran, en primer término, los artículos de la *Enciclopedia de ciencias matemáticas*, a saber: *Enriques, Prinzipien der Geometrie* (III, A. B. 1) y *v. Mangoldt: Die Begriffe «Linie» und «Fläche»* (III, A. B. 2) para la Axiomática especial; así como *Dehn-Heegaard, Analysis situs* (III, A. B. 3). Este último artículo está escrito muy abstractamente; empieza con la formulación más general de los conceptos y fundamentos del Análisis situs, que ya había establecido el mismo Dehn, y de ellos deduce todo

lo demás por vía puramente lógica. Tal método se halla en completa oposición con el método inductivo de exposición que yo recomiendo siempre, y realmente supone, para ser entendido por completo, que el lector tiene ya bastantes conocimientos de la materia, en la cual ha debido trabajar mucho con método inductivo.

En lo que toca a *bibliografía sobre Teoría de conjuntos* es digna de mención en primer lugar la memoria de *A. Schoenflies: «Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten»* publicada en la revista de la Sociedad matemática alemana (1); la primera parte apareció en el tomo VIII del *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, mientras la segunda se publicó en 1908 en forma de un segundo tomo complementario de los mismos anales. Este libro es realmente una memoria sobre toda la teoría de conjuntos, y en él se puede hallar toda clase de pormenores acerca de muchos puntos de la teoría. Además de esta obra, debe citarse el primer tratado sistemático de la teoría de conjuntos, «The theory of sets of points», de *W. H. Young*, y su mujer *G. Chisholm Young*, ya citada en la página 267.

Para terminar estas consideraciones sobre la Teoría de conjunto hemos de formular la pregunta que siempre nos ha acompañado, en el curso de estas lecciones ¿*Cómo servirse de ella en la enseñanza media?*

Desde nuestro punto de vista pedagógico-matemático, naturalmente, la respuesta debe ser absolutamente negativa, pues no deben darse tan pronto al alumno cosas demasiado abstractas y difíciles. Para precisar bien mi opinión en este punto, he de recordar la *ley fundamental biogenética*, según la cual el individuo en su desarrollo recorre en rápida sucesión todos los estados del desarrollo de la especie a que pertenece; tales ideas son ya actualmente elementos integrales de la cultura general de cada uno. Este principio, creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la enseñanza de la Matemática lo mismo que en cualquiera otra enseñanza; *se debería con-*

(1) Dos partes, Leipzig, 1900 y 1908. La primera parte ha sido revisada y publicada nuevamente en 1913 con el título «Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen»; puede considerarse como continuación la obra de *H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen*, tomo I. Berlín, 1921.

ducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico. Nunca se repetirá bastante esto, pues siempre hay gentes que, al modo de los escolásticos en la Edad Media, empiezan la enseñanza con las ideas más generales y quieren justificar este método como el «único científico». Y, sin embargo, tal cosa no ha sido cierta nunca: *enseñanza científica sólo puede llamarse a la que conduce al hombre a pensar científicamente, pero en modo alguno lo es la que desde el principio se le ofrece con una sistemática fría, aunque muy científicamente acabada.*

Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, *la falta de conocimientos históricos* que se nota con sobrada frecuencia. Para combatirlo, gustoso me he detenido en consideraciones históricas en muchos pasajes de estas lecciones; así ha podido verse cuán lentamente han ido formándose todas las ideas matemáticas, como han surgido en forma confusa, pudiera decirse que de procedimientos, y sólo después de un largo desarrollo han llegado a tomar la fuerza rígida y cristalizada de la exposición sistemática. ¡Ojalá ejerzan estas ideas algún día—y con la expresión de este deseo termino el curso de estas lecciones—un saludable influjo en la manera de enseñar propia de cada uno!